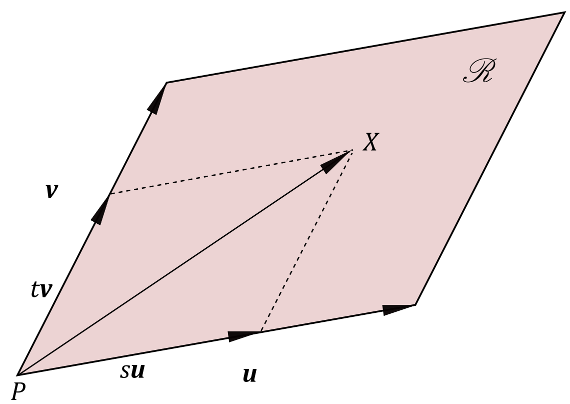
Algebra liniowa II. Lista 0

Zadanie 1. Wyznaczyć wzór na pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ wyrażony za pomocą współrzędnych tych wektorów.

Rozwiązanie. Przez równoległobok rozpięty na wektorach $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ rozumiemy podzbiór $\mathscr{R}$ płaszczyzny powstały w następujący sposób. Obieramy na płaszczyźnie jakikolwiek punkt P. Do zbioru $\mathscr{R}$ zaliczamy te wszystkie punkty X, które spełniają związek

$$\overrightarrow{PX} = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$$

gdzie s i t są liczbami z przedziału $[0, 1]$ (patrz: rysunek 1). Umieśćmy układ



Rysunek 1: Równoległobok $\mathscr{R}$ rozpięty na wektorach $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

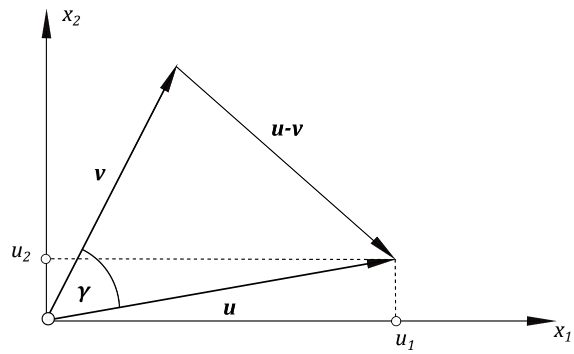
współrzędnych w ten sposób, że początek układu znajdzie się w P. Niech (u_1, u_2) oznaczają współrzędne wektora $\boldsymbol{u}$. Zgodnie z twierdzeniem Pitagorasa, długość $|\boldsymbol{u}|$ wektora $\boldsymbol{u}$ wchodzi w równości

$$|\boldsymbol{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2, \qquad |\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}. \tag{1}$$

Niech γ oznacza kąt między wektorami $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$. Wektory te wraz z $\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}$ tworzą boki trójkąta (patrz: rysunek 2).

Na podstawie twierdzenia cosinusów mamy

$$|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{u}| \cos\gamma = \frac{|\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|^2}{2}.$$



Rysunek 2: Twierdzenie cosinusów.

Po zastosowaniu (1) do wszystkich trzech wektorów ostatni związek możemy przepisać tak:

$$\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} := |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{u}| \cos\gamma = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Określona właśnie wielkość $\boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v}$ jest nazywana *iloczynem skalarnym* wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$. Niech

$$|\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}| := \left| \begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{array} \right|.$$

Określmy wielkość

$$\mathrm{gram}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) := |[\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}]^{\mathsf{T}}| \cdot |\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}| = \left| \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{array} \right|.$$

Stąd, że wyznacznik iloczynu dwóch macierzy kwadratowych jest równy iloczynowi wyznaczników otrzymujemy

$$\mathrm{gram}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \left| \begin{array}{cc} \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{u} & \boldsymbol{u} \bullet \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{u} & \boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v} \end{array} \right|.$$

Bardziej geometrycznie,

$$\mathrm{gram}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \left| \begin{array}{ll} |\boldsymbol{u}|^2 & |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\gamma \\ |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \cos\gamma & |\boldsymbol{v}|^2 \end{array} \right|.$$

Obliczmy otrzymany wyznacznik:

$$\mathrm{gram}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u}|^2 |\boldsymbol{v}|^2 \cos^2\gamma = (|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}| \sin\gamma)^2.$$

W takim razie, w zgodzie ze szkolnym wzorem, $\sqrt{\mathrm{gram}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})}$ wyraża pole $|\mathscr{R}|$ równoległoboku $\mathscr{R}$. Ponieważ wyznacznik macierzy jest taki sam jak jej transponowanej, więc na podstawie definicji $\mathrm{gram}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$. Otrzymamy

$$|\mathscr{R}| = \sqrt{\mathrm{gram}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})} = \mathrm{abs}(|\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}|).$$

($\mathrm{abs}(x)$ oznacza tutaj wartość bezwzględną liczby x.) Nasuwa się pytanie: Jak znak wyznacznika $|\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}|$ zależy od wzajemnego położenia wektorów $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$?

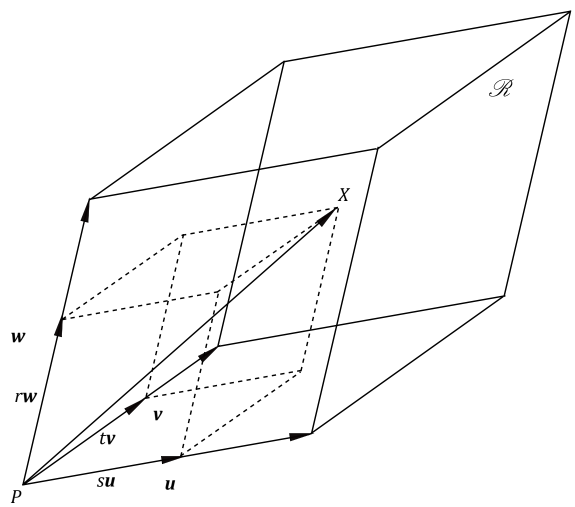
Zadanie 2. Niech $A(x_1,x_2), B(y_1,y_2), C(z_1,z_2)$ będą trzema punktami płaszczyzny z zadanym układem współrzędnych kartezjańskich. Niech $\triangle$ będzie trójkątem o wierzchołkach w tych trzech punktach. Wykaż prawdziwość następujących wzorów;

$$|\triangle| = \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} y_1-x_1 & z_1-x_1 \\ y_2-x_2 & z_2-x_2 \end{vmatrix}\right) = \mathrm{abs}\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right).$$

Zadanie 3. (do pracy w grupach) Równoległościanem (w przestrzeni $\mathbb{R}^3$) nazywamy zbiór punktów $\mathscr{R}$, że istnieje punkt P i trzy liniowo niezależne wektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ o tej właności, że

$$X \in \mathscr{R} \Longleftrightarrow \bigvee_{s,t,r\in[0,1]} \overrightarrow{PX} = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} + r\boldsymbol{w}.$$

(patrz rysunek 3). Na podobieństwo wzoru na pole równoległoboku, wyznaczyć wzór na objętość równoległościanu. A jak będzie wyglądał wzór na objętość czworościanu jeśli przyjąć, że znamy współrzędne jego wierzchołków?



Rysunek 3: Równoległościan.